

# Mathematics

# 數學科

## Factorization

## 因式分解



計數要小心，  
咪期望快一陣！

# Contents 目錄:

## **Factorization 因式分解**

- **Distinction between Identity and equation 方程與恆等式之區別**
- **Linear equation in one unknown 一元線性方程**
- **Fundamental operations on polynomials 多項式之基本運算**
- **Five ways for Factorization 因式分解的五個辦法**

## (A) Distinction between identities and equations.

### 方程與恆等式之區別

#### i. Definition of Equation / Identity 方程/恆等式的定義

**Equation 方程:** an equality (等式) which is true for special value(s) of x (特別 x).

**Identity 恆等式:** an equality (等式) which is true for all values of x (所有 x).

#### ii. Useful Identities 有用恆等式:

a.  $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$

b.  $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a - b)^2$

c.  $a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$

d.  $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

e.  $a^3 - b^3 \equiv (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

f.  $a^4 - b^4 \equiv (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

黎 Sir 提提你  :

## Exam Type Questions:

### a. Determine Identities & Equations 證明恆等式和方程

e.g. Which is Equation? Which is Identity? 那些是方程? 那些是恆等式?

a.  $x^2 + 2x + 1 = 0$

黎 Sir 提提你  :

b.  $x = 0$

黎 Sir 提提你  :

c.  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

黎 Sir 提提你  :

d.  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

黎 Sir 提提你  :

### b. Find Unknowns in identities 找出恆等式的未知數

#### Skill 1: Compare Coefficient 技巧 1: 比較係數

e.g. Find k if  $(x - 3)(x - 1) \equiv x^2 - 4x + k$ .

黎 Sir 提提你  :

e.g. For what value(s) of  $x$  does the equality (等式)  $\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2$  hold (成立)?

黎 Sir 提提你 :

e.g. Given the identity  $\frac{y+1}{(y-1)^2} + \frac{2}{1-y} - \frac{R}{(1-y)^2} \equiv \frac{2-Sy}{(1-y)^2}$ . Find the value of  $R$  and  $S$ .

黎 Sir 提提你 :

## Skill 2: Substitution 技巧 2: 代入法

e.g. Find  $A$ ,  $B$  and  $C$  if  $A(x+1)(x-2) + B(x-1) + C \equiv 3x^2 + 2x - 1$

黎 Sir 提提你 :

## (B) Linear equation in one unknown

### 一元線性方程

$ax + b = 0 \rightarrow$  Linear equation in one unknown 一元線性方程

e.g.  $3x + 7 = -6$

黎 Sir 提提你  :

e.g.  $\log x + \log 5 = \log 7$

黎 Sir 提提你  :

## (C) Fundamental operations on polynomials 多項式之基本運算

### 1. Definition of Polynomials 多項式定義

**Polynomial** contains one term or a sum of terms, each term is a product of a constant / coefficient and one of more **variables whose exponents are non-negative integers**.

多項式可以含有一個項或幾個項的和，各項都由一個常數／係數與一個或多個變數的冪的積組成，而這些變數的指數都是非負整數。

**Degree:** The degree of a polynomial is equal to the **highest degree of its terms**.

次數：多項式的次數是等於該多項式中最高的項的次數。

The terms of a polynomial are usually written in **descending order**.

多項式的項通常都按變數的降冪排列。

e.g.  $-3x^4 + 2x^2 + 1$

e.g.  $-3x^4 + 2x^2 + 1$

<b>Degree 次數:</b>	<b>Coefficient 係數 of <math>x^4</math>:</b>	<b>Coefficient 係數 of <math>x^3</math>:</b>
<b>Coefficient 係數 of <math>x^2</math>:</b>	<b>Coefficient 係數 of <math>x</math>:</b>	<b>Constant 常數:</b>

e.g. Determine whether the following is polynomials or not. 決定下列各項是否多項式。

Example	Polynomials 多項式	No. of Terms 項數	Degree 次數	Constant 常數
$7x^3 - 2x^2 + x - 4$				
1				
$7x - \frac{1}{x}$				
$5x^2 + 5\sqrt{x}$				
$\frac{2x+5}{x^2-7x+2}$				
$\sin x + 7$				

### 2. Polynomial form – easy to recognize. 多項式 – 易認款式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

while  $n$  is a non-negative integer,  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  are real and  $a_n \neq 0$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

當  $n$  是非負整數， $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  都是實數且  $a_n \neq 0$ 。

### 3. Fundamental operations on Polynomials 多項式的簡單因式分解

#### a. Addition 加法

e.g.  $(6x^3 - 3x + 7) + (5x^3 + 2x - 3)$

黎 Sir 提提你  :

e.g.  $(2x^2 - 3x + 7) + (5x^3 - 3x^2 - 3)$

黎 Sir 提提你  :

#### b. Subtraction 減法

e.g.  $(6x^3 - 3x + 7) - (5x^3 + 2x - 3)$

黎 Sir 提提你  :

e.g.  $(2x^2 - 3x + 7) - (5x^3 - 3x^2 - 3)$

黎 Sir 提提你  :

**c. Multiplication 乘法**

e.g.  $(4x^2 - 8x + 3) \bullet (-3x + x^2 - 6)$

黎 Sir 提提你  :

e.g.  $(x^2 + 7x - 3) \bullet (-x + 3)$

黎 Sir 提提你  :

黎 Sir 提提你  :

**d. Division 除法**

e.g.  $(4x^2 - 8x + 3) \div (-3x + x^2 - 6)$

黎 Sir 提提你  :

e.g.  $(x^2 + 7x - 3) \div (-x + 3)$

黎 Sir 提提你  :

黎 Sir 提提你  :

#### 4. Equality of Polynomials 恆等的多項式

What is equality of polynomials 恆等的多項式?

在這兩個多項式中，同類項的係數是相等，則這兩個多項式是恆等的。i.e.  $f(x) \equiv g(x)$ .

e.g. If  $(2x+1)(2x-3)(2x+5) \equiv Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ , find A, B, C and D.

黎 Sir 提提你  :

e.g. If  $P(x-1)^2 + Q(x-1) + R \equiv 4x^2 - 5x + 2$ , find P and Q.

黎 Sir 提提你  :

## 5. Simplification of Algebraic Fractions 約簡代數份式

黎 Sir 提提你  :

e.g. Simplify 約簡  $\frac{(a-2)(1+a^3)}{(1-a^2)(1-a+a^2)}$

黎 Sir 提提你  :

e.g. Simplify 約簡  $\frac{3}{x^2+13x+40} + \frac{1}{x^2+9x+20}$

黎 Sir 提提你  :

e.g. Simplify 約簡  $\frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 4x + 3} \times \frac{8x^2 - 24x}{2x^2 - 2x - 4} \div \frac{x^2 + x}{x + 1}$

黎 Sir 提提你  :

e.g. Simplify 約簡以下  $\frac{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}}{\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x+y}}$ .

黎 Sir 提提你  :

## **(D) 5 ways for Factorization 因式分解的 5 個辦法**

1. Taking out Common Factors 抽公因式

2. Grouping Terms 併項法

3. Cross-method 十字相乘法

4. Useful Identities 有用恆等式

$$a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a - b)^2$$

$$a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 \equiv (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 \equiv (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$$

5. Synthetic Division 綜合除法 (Optional)

[+因式定理 factor theorem 去因式分解 Factorize 三次 polynomials 多項式]

黎 Sir 提提你  :

e.g. Factorize 因式分解

a.  $4x^2 - 4xy + y^2$

b.  $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y$

黎 Sir 提提你  :

e.g. Factorize 因式分解

a.  $x^3 - (x-1)^3$

b.  $a^2b^2 - 3ab + 2$

黎 Sir 提提你  :

e.g. Factorize 因式分解

a.  $a^2 - ab + 2a - 2b$

b.  $169y^2 - 25$

黎 Sir 提提你  :

e.g. Factorize 因式分解

a.  $x^2 - (y-z)^2$

b.  $ab - ad - bc + cd$

黎 Sir 提提你  :

e.g. Factorize 因式分解

a.  $4x^2 - x + 4ax - a$

黎 Sir 提提你  :